物理の数学的表現　I

斜面を滑り落ちる運動で見る理科と数学の関係

香川大学創造工学部
石原　秀則

本日の内容

1. 物体の運動の表現
2. 位置と速度の関係
3. 物体の運動する空間
4. 物体の運動を数式で表す
5. 物体の運動を数式で考える
6. 物体の運動を数式から求める
7. 実験で数式を検証する。
8. 数学と物理のつながり

物体の運動の表現

物体の運動を表す量は

位置 Position

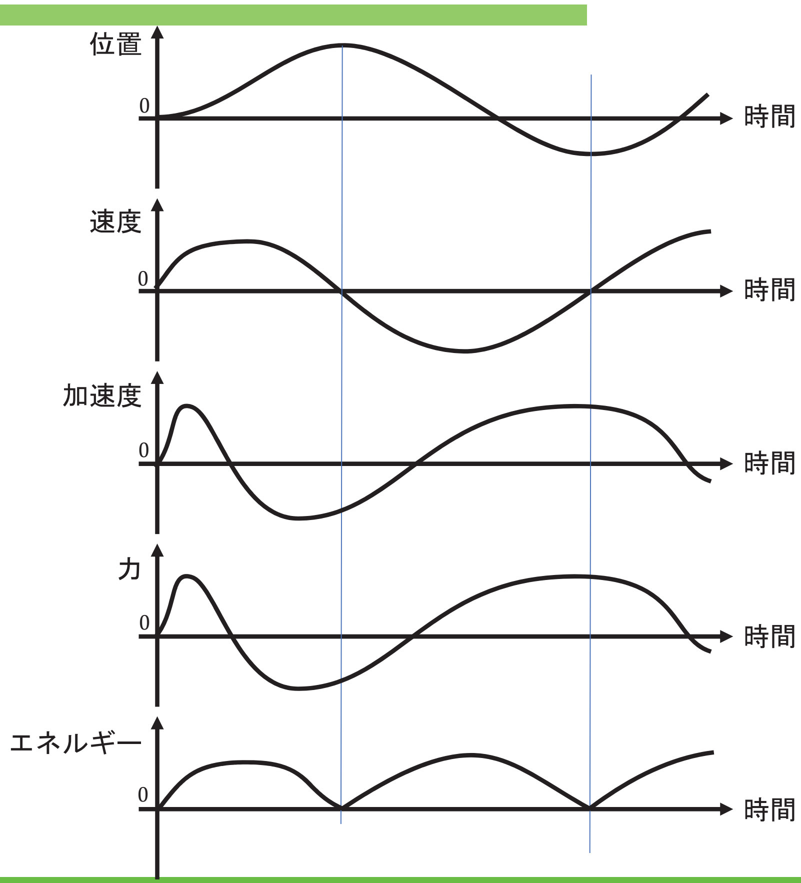
姿勢 Posture

速度 Velocity

加速度 Acceleration

力 Force

エネルギー Energy



物理の数学的表現　I　　斜面を滑り落ちる運動で見る理科と数学の関係

物体の運動の数学的表現

物体の運動を表す量の単位は

微分 ⇒ 数II

位置 Position	$[m]$	
速度 Velocity	$[{}^{m}/_{s}]$	$v = \frac{dx}{dt}$
加速度 Acceleration	$[{}^{m}/_{s^2}]$	$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$
力 Force	$[N] = [{}^{kg \cdot m}/_{s^2}]$	$F = ma$
エネルギー Energy	$[J] = [{}^{kg \cdot m^2}/_{s^2}]$	$E = \frac{1}{2}mv^2 = mgh$

質量　m　$[kg]$　　高さ　h　$[m]$　　重力加速度　g　$[{}^{m}/_{s^1}]$

位置と速度の関係（等速）

2点間を移動する速度

2点間の距離Lを、移動するのにかかった時間Tをとすると
2点間を移動した速度Vは

$$V = \frac{L}{T}$$

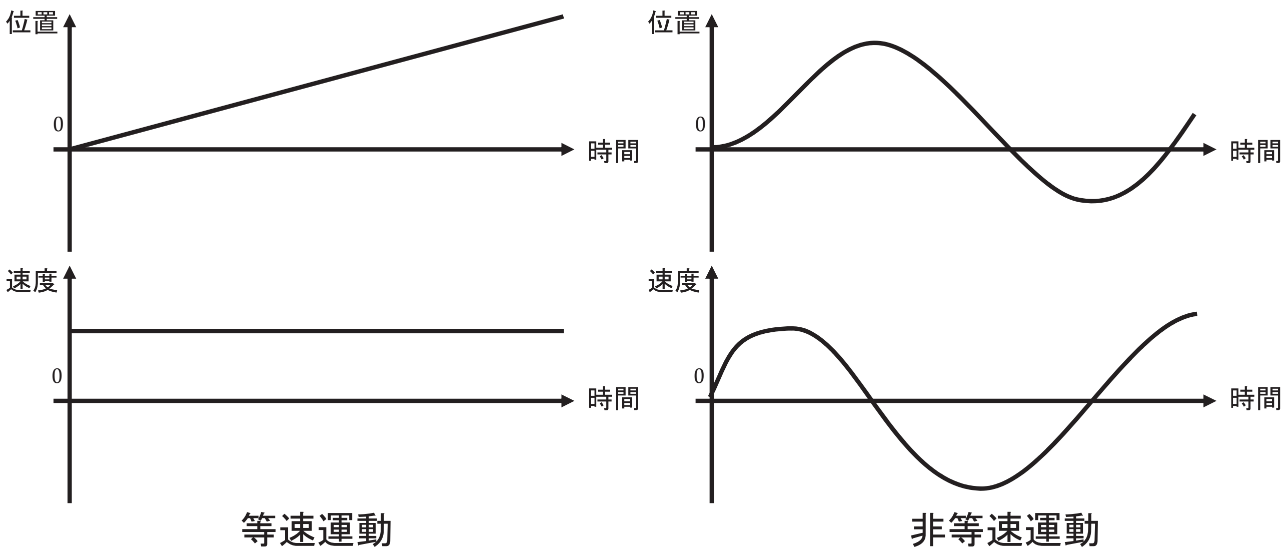
それでは、2点間を移動している途中の速度は？

- 等速運動であれば、常にVで一定
- 等速でない場合は、変化し続ける　⇒　瞬間の速度

物理の数学的表現　I
斜面を滑り落ちる運動で見る理科と数学の関係

位置と速度の関係（瞬間の速度）

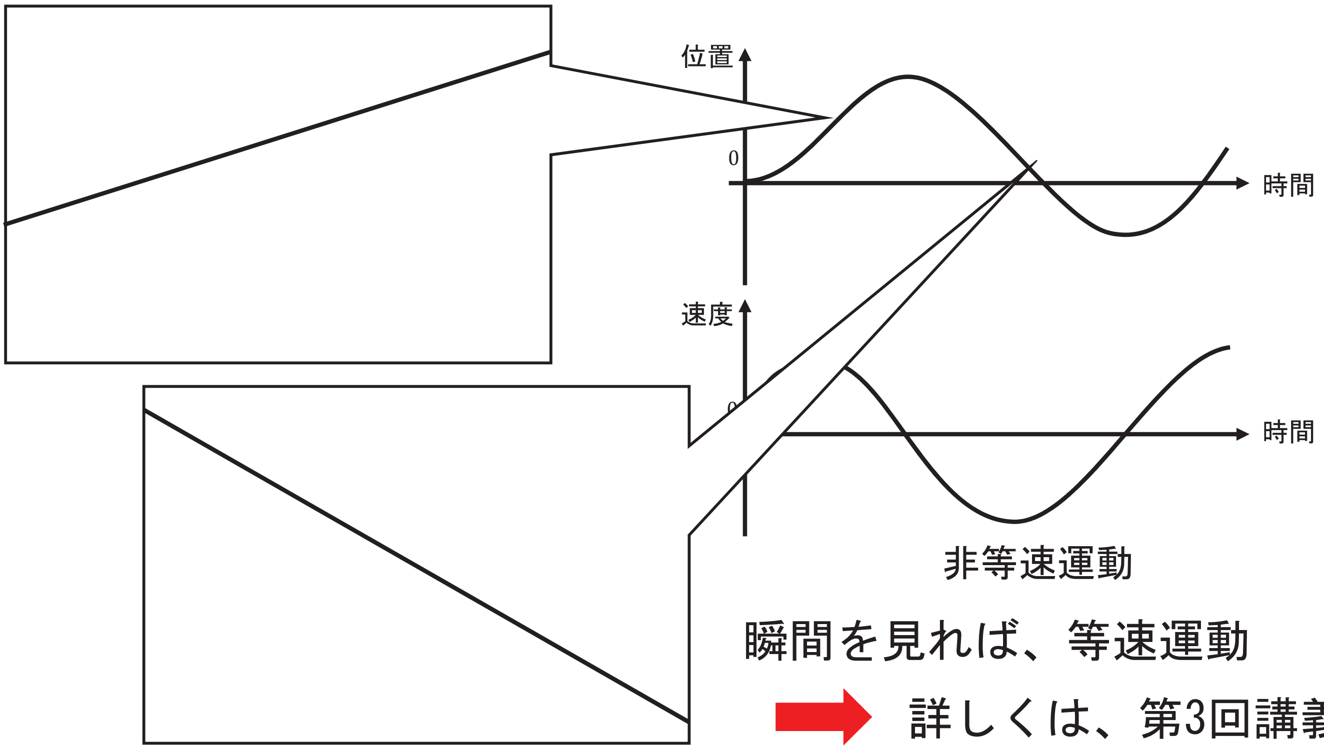
瞬間の速度の求め方は？



瞬間の速度は、その瞬間にどれぐらい移動したか

位置と速度の関係（瞬間の速度）

瞬間の速度の求め方は？



非等速運動

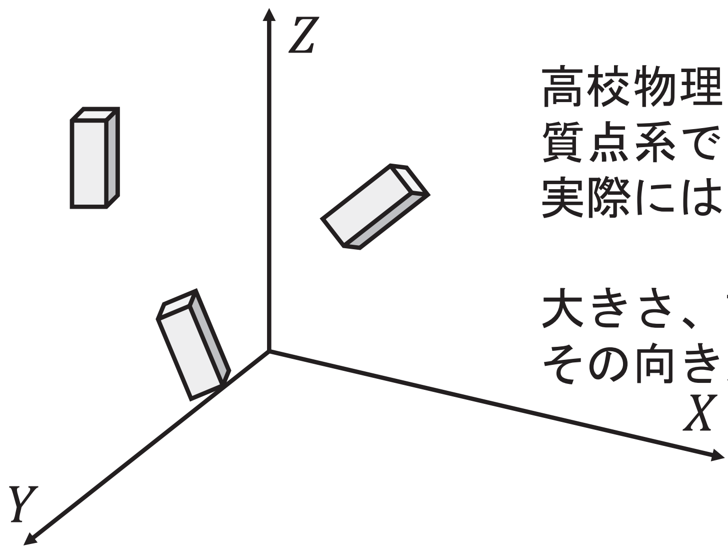
瞬間を見れば、等速運動

詳しくは、第3回講義で

物体の運動する空間

物体は3次元空間で動く

位置だけではなく、方向（向き）も重要

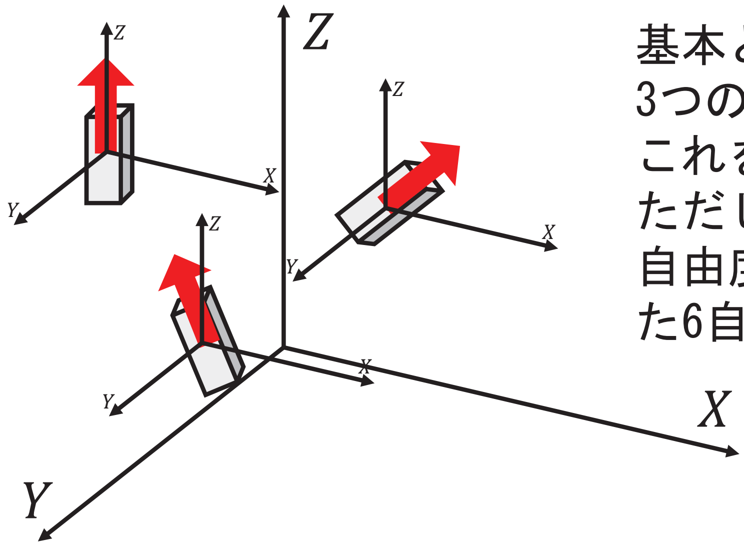


高校物理では、点に質量が集中した質点系で、物体の運動を考えるが、実際には、ものには大きさがある。

大きさ、言い替えれば、形があり、その向きが重要になる。

3次元空間での物体の位置と姿勢

XYZ空間では、位置は、座標(x,y,z)で表される。その座標において、物体の方向は、各座標軸に対する角度(α,β,γ)で与えられる。



基本としては、3次元空間は、3つの座標で位置を表しており、これを3自由度という。
ただし、工学などでは、位置3自由度と姿勢3自由度を合わせた6自由度で、表す。

物理の数学的表現　Ⅰ　　斜面を滑り落ちる運動で見る理科と数学の関係

物体の運動を数式で表す

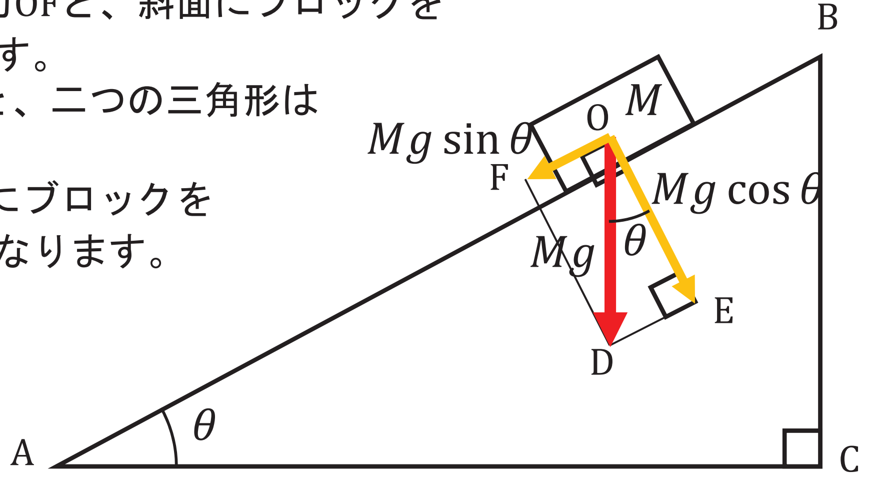
物体の運動は、数式で表す事が可能。

（例題）

傾斜角θの斜面に、質量Mの直方体のブロックを滑らせるときのブロックの運動を調べる。

ブロックに働いている力は、重力Mgです。
その重力は、斜面に沿った力$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$と、斜面にブロックを押しつける力$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$に分かれます。
△ABCと△ ODEに着目すると、二つの三角形は相似です。
斜面に沿った力$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$と、斜面にブロックを押しつける力$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$は次の様になります。

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}} = Mg\sin\theta$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = Mg\cos\theta$$



物体の運動を数式で表す

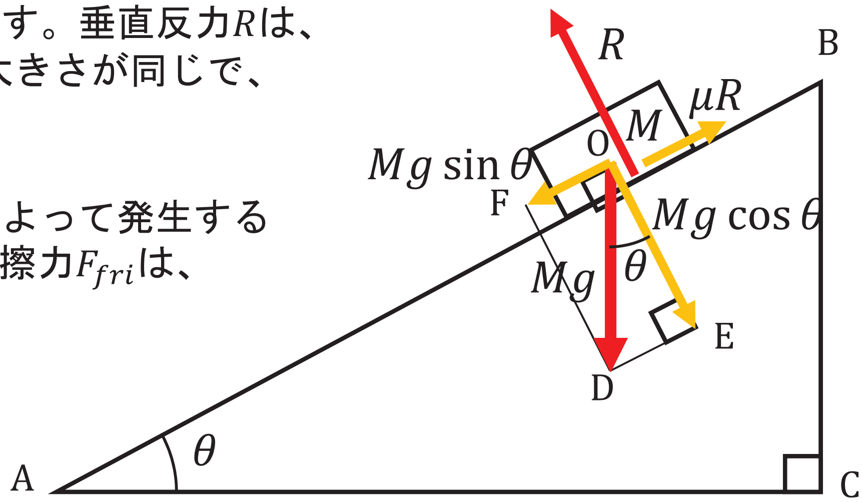
物体の運動は、数式で表す事が可能。
（例題）
傾斜角θの斜面に、質量Mの直方体のブロックを滑らせるときのブロックの運動を調べる。

このとき、ブロックには、斜面に押しつけられる力に対する垂直反力Rが作用します。垂直反力Rは、斜面に押しつけられる力と大きさが同じで、方向が逆の力です。

$$|R| = |\overrightarrow{\mathrm{OE}}| = Mg\cos\theta$$

ブロックには、垂直抗力Rによって発生する摩擦力F_{fri}も作用します。摩擦力F_{fri}は、垂直抗力Rと摩擦係数μから、次の様に求められます。

$$F_{fri} = \mu R = \mu Mg\cos\theta$$



物理の数学的表現　I
斜面を滑り落ちる運動で見る理科と数学の関係

物体の運動を数式で表す

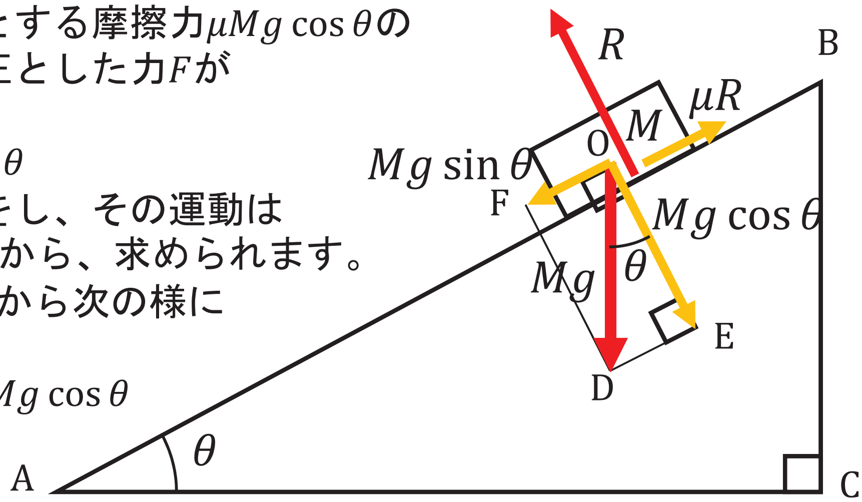
物体の運動は、数式で表す事が可能。
（例題）
傾斜角θの斜面に、質量Mの直方体のブロックを滑らせるときのブロックの運動を調べる。

ブロックに作用する斜面方向の力は、滑らせようとする重力の分力$Mg\sin\theta$と滑り落ちるのを止めようとする摩擦力$\mu Mg\cos\theta$の合力として、斜面下向きを正とした力Fが次の様に求められます。

$$F = Mg\sin\theta - \mu Mg\cos\theta$$

ブロックは、この力で運動をし、その運動はブロックに発生する加速度aから、求められます。ここでニュートンの第1法則から次の様に求められます。

$$Ma = F = Mg\sin\theta - \mu Mg\cos\theta$$



物体の運動を数式から考える

物体の運動を、数式で考える事が可能。

（例題）

傾斜角θの斜面に、質量Mの直方体のブロックを滑らせるときのブロックが運動する条件を調べる。

ブロックに斜面に沿って働く力は

$$F = Mg\sin\theta - \mu Mg\cos\theta$$

である。

ブロックが斜面を滑り落ちる条件は何でしょう？

滑り落ちるためには、力が、斜面下向きに働くことが必要です。

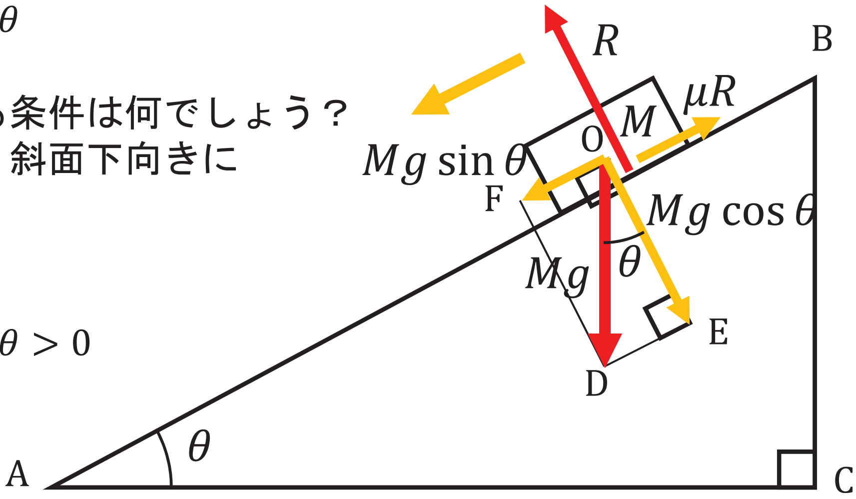
$$F > 0$$

二つの式から、

$$F = Mg\sin\theta - \mu Mg\cos\theta > 0$$

$$Mg\sin\theta > \mu Mg\cos\theta$$

$$\therefore \mu < \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$



物体の運動を数式から考える

物体の運動を、数式で考える事が可能。

摩擦係数を考える。

斜面の角度を、0から順次大きくしてみる。

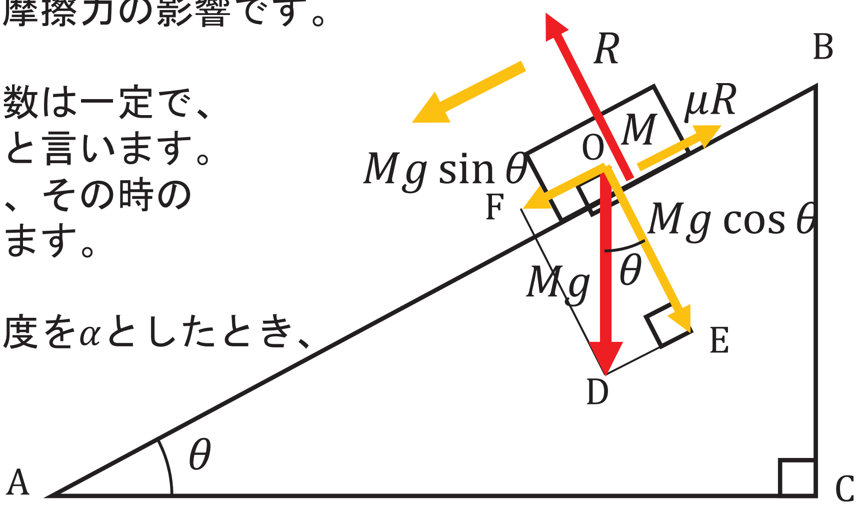
角度が小さいときは、ブロックは動かないが、ある角度を超えると、ブロックは斜面を滑ります。これは、斜面とブロックの間に働いている摩擦力の影響です。

静止しているときは、摩擦係数は一定で、この摩擦係数を静止摩擦係数と言います。動き出すと摩擦係数が変わり、その時の摩擦係数を動摩擦係数と言います。

静止摩擦係数は、動き出す角度をαとしたとき、

$$\mu = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

で求めることができます。



物体の運動を数式から求める

物体の運動を、数式で使って求めてみよう。

（例題）

傾斜角θの斜面に、質量Mの直方体のブロックを滑らせるときのブロックが滑り落ちる時間を求める。

①斜面に沿った距離から考える

ブロックに斜面に沿って働く力は

$$F = Mg\sin\theta - \mu Mg\cos\theta$$

である。

この力は、斜面に沿って運動する加速度になる。

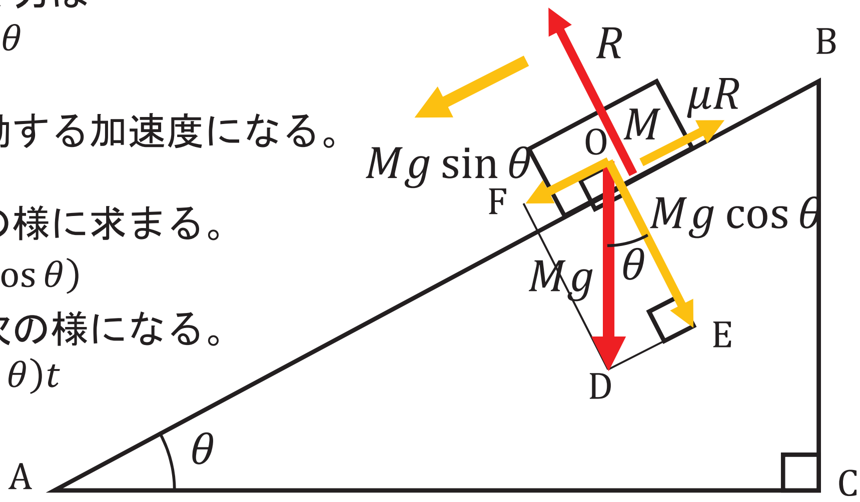
$$F = Ma$$

この式から、加速度は、次の様に求まる。

$$a = {}^{F}\!/_{M} = g(\sin\theta - \mu\cos\theta)$$

斜面に沿って動く速度は、次の様になる。

$$v = at = g(\sin\theta - \mu\cos\theta)t$$



物理の数学的表現　I　斜面を滑り落ちる運動で見る理科と数学の関係

物体の運動を数式から求める

物体の運動を、数式で使って求めてみよう。

（例題）

傾斜角θの斜面に、質量Mの直方体のブロックを滑らせるときのブロックが滑り落ちる時間を求める。

①斜面に沿った距離から考える

斜面に沿って、加速度aで距離Lを動くとき、次の式が求まる。

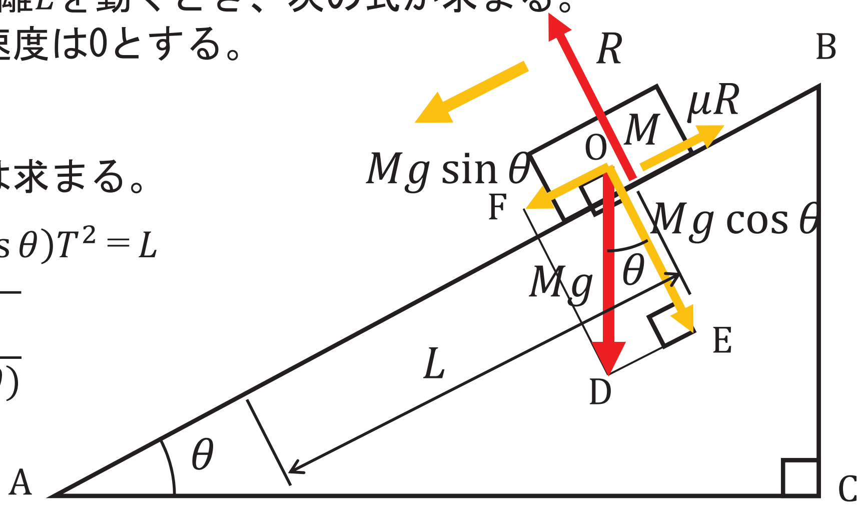
ただし、動き出したときの速度は0とする。

$$\frac{1}{2}aT^2 = L$$

この式を解くことで、時間は求まる。

$$\frac{1}{2}aT^2 = \frac{1}{2}g(\sin\theta - \mu\cos\theta)T^2 = L$$

$$\therefore T = \sqrt{\frac{2L}{g(\sin\theta - \mu\cos\theta)}}$$



物体の運動を数式から求める

物体の運動を、数式で使って求めてみよう。

（例題）

傾斜角θの斜面に、質量Mの直方体のブロックを滑らせるときのブロックが滑り落ちる時間を求める。

②水平方向の移動距離から考える

次に、斜面に沿って

$$F = Mg(\sin\theta - \mu\cos\theta)$$

の力で滑っていると考える。

この力を水平方向と垂直方向に分けて考える。

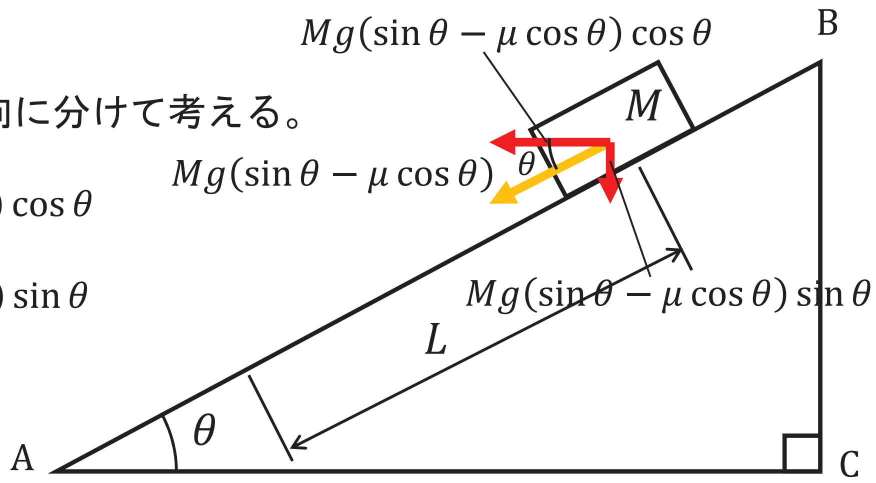
水平方向の力は

$$F_x = Mg(\sin\theta - \mu\cos\theta)\cos\theta$$

垂直方向の力は

$$F_y = Mg(\sin\theta - \mu\cos\theta)\sin\theta$$

となる。



物理の数学的表現 I
斜面を滑り落ちる運動で見る理科と数学の関係

物体の運動を数式から求める

物体の運動を、数式で使って求めてみよう。

（例題）

傾斜角θの斜面に、質量Mの直方体のブロックを滑らせるときのブロックが滑り落ちる時間を求める。

②水平方向の移動距離から考える

斜面に沿って、距離Lを動くことを、水平方向と垂直方向に分けて考える。

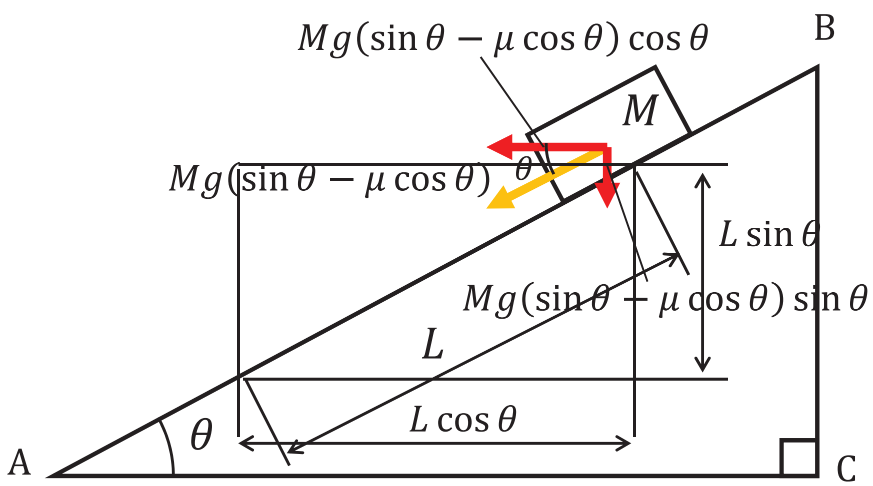
水平方向の移動距離L_xは、

$$L_x = L\cos\theta$$

垂直方向の移動距離L_yは、

$$L_y = L\sin\theta$$

となる。



物体の運動を数式から求める

物体の運動を、数式で使って求めてみよう。

（例題）

傾斜角θの斜面に、質量Mの直方体のブロックを滑らせるときのブロックが滑り落ちる時間を求める。

②水平方向の移動距離から考える

水平方向の移動は、距離L_xを力F_xを受けて運動しているとみる。

$$F_x = Mg(\sin\theta - \mu\cos\theta)\cos\theta$$

このとき、加速度aは、

$$a = g(\sin\theta - \mu\cos\theta)\cos\theta$$

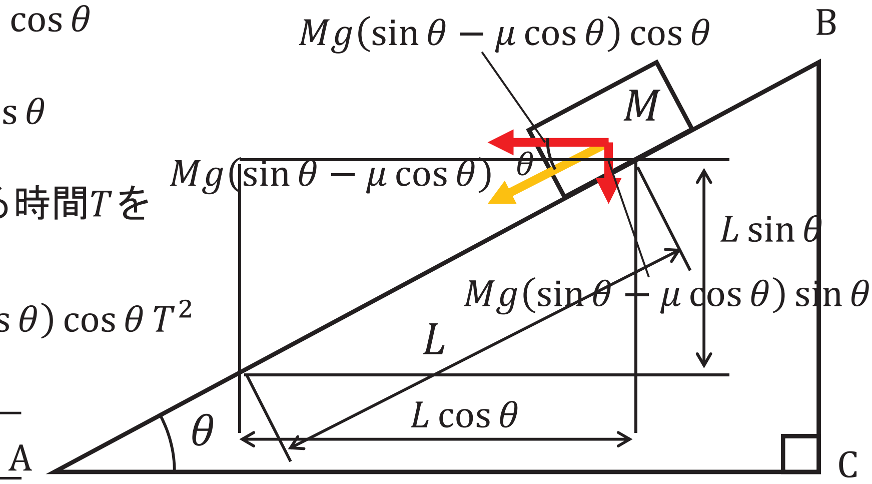
となる。

ここから、距離L_xを移動する時間Tを求めると、次の様に求まる。

$$\frac{1}{2}aT^2 = \frac{1}{2}g(\sin\theta - \mu\cos\theta)\cos\theta\, T^2$$

$$= L_x = L\cos\theta$$

$$\therefore T = \sqrt{\frac{2L}{g(\sin\theta - \mu\cos\theta)}}$$



物理の数学的表現　I　　斜面を滑り落ちる運動で見る理科と数学の関係

物体の運動を数式から求める

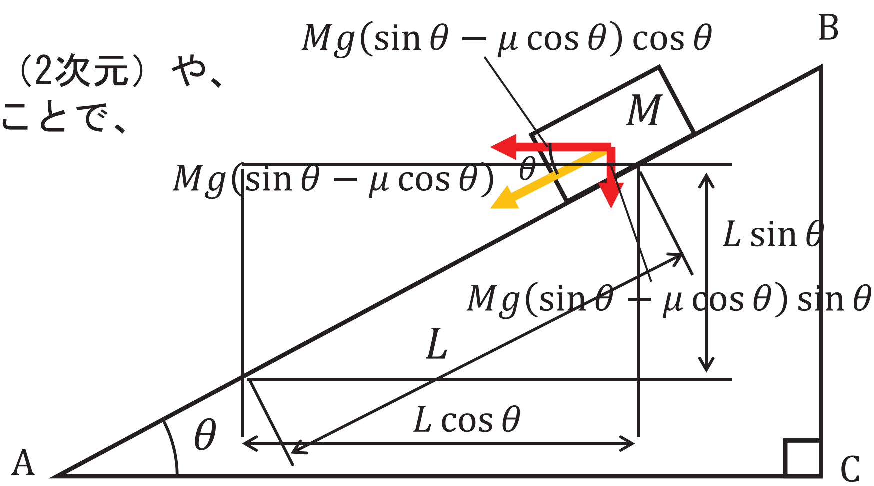
物体の運動を、数式で使って求めてみよう。

（例題）

傾斜角θの斜面に、質量Mの直方体のブロックを滑らせるときのブロックが滑り落ちる時間を求める。

①斜面に沿った移動と②水平方向の移動で、移動時間を計算すると、どちらも同じ時間が求められる。

3次元空間での運動も、平面（2次元）や、直線（1次元）へ、投影することで、求めることができる。



実験で数式を検証する。

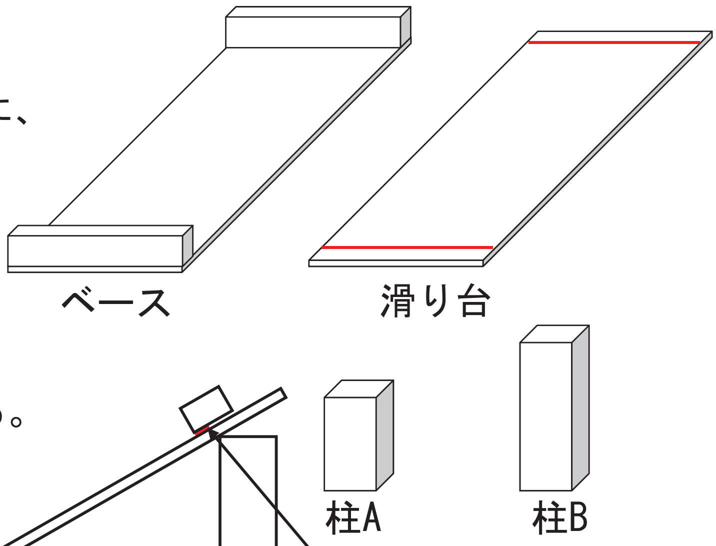
（実験I　実験手順）

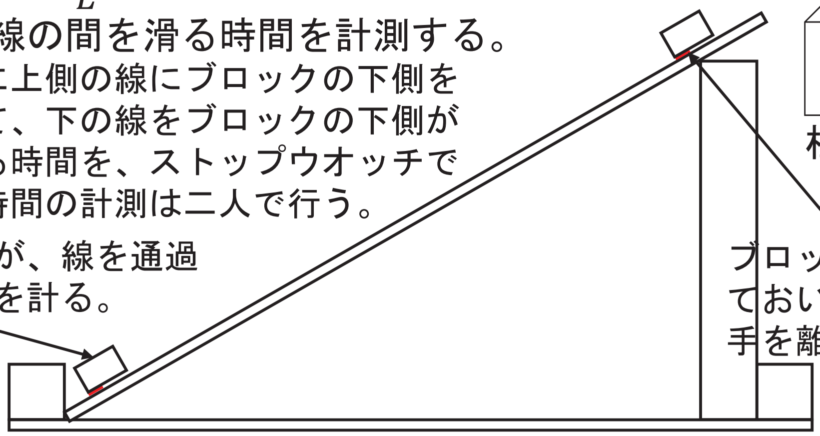
(1) 図を参考に、柱Aで斜面を作る。
　滑り台の上をブロックを滑らせたときに、まっすぐ滑るようにすること。

(2) 図に示した寸法を測る。
　滑り台の角度を求めることが目的だが、図の寸法を測れば、角度が計算できる。

$$\tan\theta = \frac{H}{L}$$

(3) 滑り台の線の間を滑る時間を計測する。
　図の様に上側の線にブロックの下側を合わせて、下の線をブロックの下側が通過する時間を、ストップウオッチで計る。時間の計測は二人で行う。





ブロックの下側が、線を通過するときの時間を計る。

ブロックの下側を線に合わせておいて、計測開始と同時に手を離す

物理の数学的表現　I　　斜面を滑り落ちる運動で見る理科と数学の関係

実験で数式を検証する。

（実験I　実験データ（実験環境））

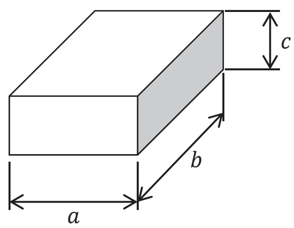
ブロック

		幅 a [mm]	長さ b [mm]	高さ c [mm]	重さ M [kg]
ブロック1 アルミ	1回目				
	2回目				
	3回目				
	平均				

①

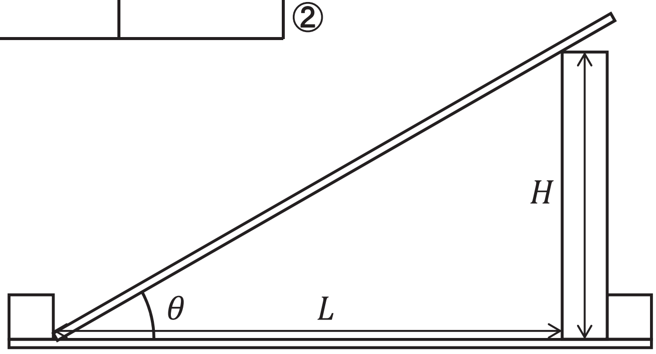
		幅 a [mm]	長さ b [mm]	高さ c [mm]	重さ M [kg]
ブロック2 木材	1回目				
	2回目				
	3回目				
	平均				

②



スロープ

		長さ L [mm]	高さ H [mm]
スロープ	1回目		
	2回目		
	3回目		
	平均		
		③	④



実験で数式を検証する。

（実験I　実験データ（計測データ））

計測データ

		A	B	A, Bの平均
計測データ	1回目			
	2回目			
	3回目			
	3回の平均			

⑤

（実験I　実験データ（まとめ））

③、④を用いて、

$\tan\theta = \frac{H}{L}$　・・⑥

から、$\sin\theta$と$\cos\theta$を計算する。

$\sin\theta =$＿＿＿＿＿＿＿＿　・・⑦

$\cos\theta =$＿＿＿＿＿＿＿＿　・・⑧

三角関数（三角比）の関係は

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

の二つをまず覚える。

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$$

$$\therefore \sin\theta = \frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$$

実験で数式を検証する。

（実験I　実験データ（まとめ））

計測データ

滑り落ちる長さL_sを$L_s = 1000$とし、⑤、⑦、⑧の値を、

$$T = \sqrt{\frac{2L_s}{g(\sin\theta - \mu\cos\theta)}}$$

に代入して、μを計算する。（$g = 9.8$）

$\mu =$＿＿＿＿＿＿＿＿　・・⑨

運動を表す計算式の中には、その値がわからないものが含まれることが多くあります。
そのような不明な変数（パラメータ）を、実験から求められるデータなどを使って計算することで、求めることを、パラメータの同定と呼びます。物理の解析での重要な手順です。

実験で数式を検証する。

（実験II　実験手順）

(1) 柱Bを使ってスロープを作り、長さと高さを計る。

スロープ

		長さ L [mm]	高さ H [mm]
スロープ	1回目		
	2回目		
	3回目		
	平均		
		⑩	⑪

(2) 式⑥を使って、$\sin\theta$と$\cos\theta$を計算する。

$\sin\theta =$＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　・・⑫

$\cos\theta =$＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　・・⑬

(3) 次の式に、⑨、⑫、⑬の値を次式に代入して、時間Tを求める。

$$T=\sqrt{\frac{2L_S}{g(\sin\theta-\mu\cos\theta)}}=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \quad \cdot\cdot⑭$$

物理の数学的表現　I　　斜面を滑り落ちる運動で見る理科と数学の関係

実験で数式を検証する。

（実験II　実験手順）

(1) 柱Bを使ってスロープを作り、長さと高さを計る。

(2) 式⑥を使って、$\sin\theta$と$\cos\theta$を計算する。

(3) 次の式に、⑨、⑫、⑬の値を次式に代入して、時間Tを求める。

$$T=\sqrt{\frac{2L_S}{g(\sin\theta-\mu\cos\theta)}}=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \quad \cdot\cdot⑭$$

(4) ブロックを使って、滑り落ちる時間を計測する。

計測データ

		A	B	A, Bの平均
計測データ	1回目			
	2回目			
	3回目			
	3回の平均			⑮

(5) ⑭と⑮の時間を比較する。

⑭は理論値と言って、計算から求めたもので、⑮の実験と比較することは、ものづくり（設計）において、重要な解析です。

数学と物理のつながり

物理で扱う諸現象は、数式で表現できる。
数式には、物理的関係を表しているものが多い。

数学も物理も、単なる公式暗記ではなく、式や関係の意味を理解することが重要。

中学や高校で扱う物理の公式は、一般式に対する特異解であることが多く、一般式を理解できれば、物理は簡短！

ニュートンの第1法則の運動方程式は、加速度aと力Fを使って

$$F = Ma$$

と学ぶが、微分を使って、

$$F = M\frac{d^2x}{dt^2}$$

と表現し、この式（微分方程式）を解けば、運動の解析が容易になる。