

物体の運動を数式で表す

香川大学創造工学部
石原 秀則

本日の内容

1. 物体の速度
物体の速度／位置と速度の関係／平均の速度／瞬間の速度／速度の求め方／瞬間の速度の求め方
 2. 瞬間の速度の求め方
瞬間という考え方／瞬間の速度の計算／微分と速度／微分と積分
 3. 物理と数学の関係性
 4. 振り子実験装置の製作
 5. 振り子の実験
振り子の実験（データ）（考察）／振り子のモデルの計算（速度）（周期）／振り子の実験（まとめ）（
 6. まとめ
- 練習問題

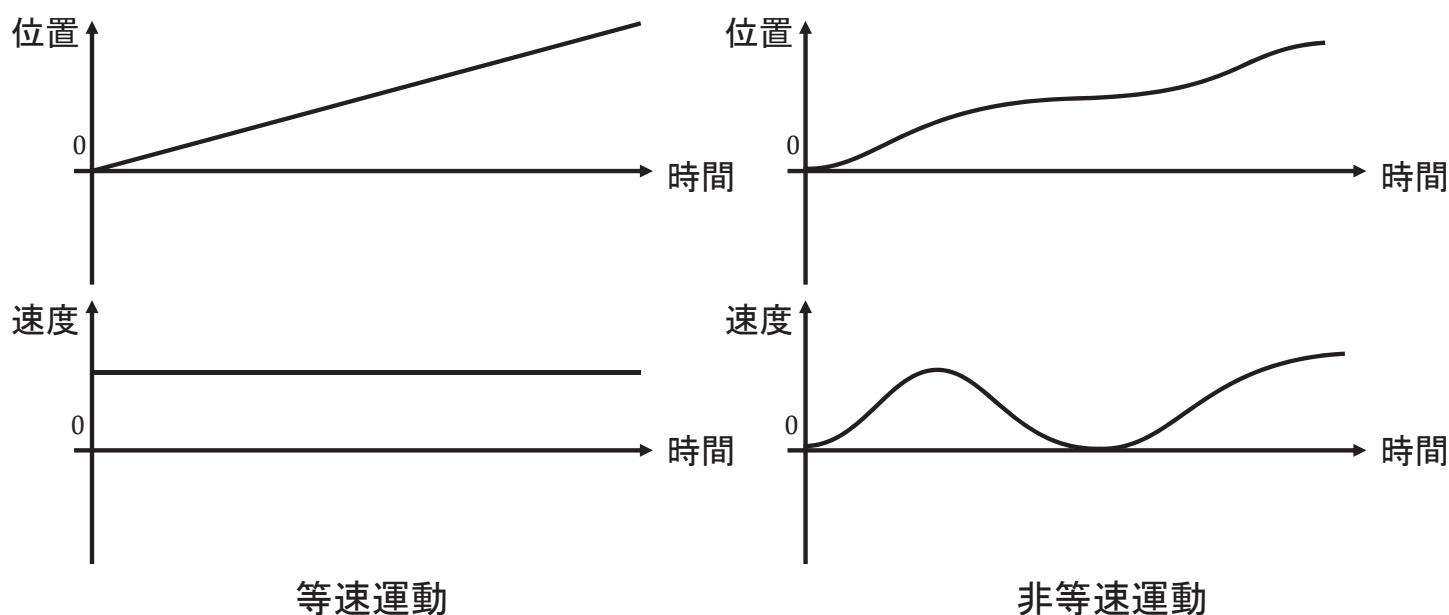
物体の速度

速度には、
 ー平均の速度
 ー瞬間の速度
 があります。

丸亀から高松までの30kmを30分走ったとすれば、60km/h（時速60km）となりますが、その途中はどうなっているのでしょうか。実際には、信号で止まったりするなど、速度は変化しています。

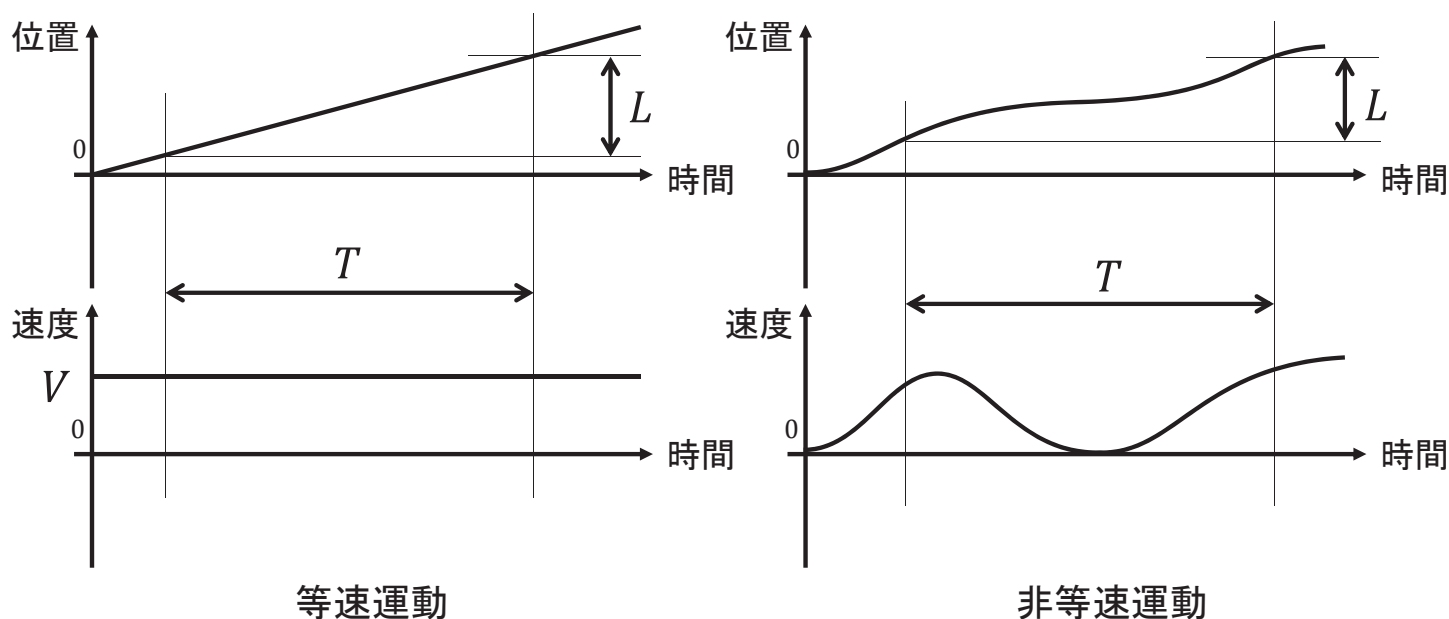
規定の距離を走行した時間から求めた速度を、平均の速度。走行中の変動する速度を、瞬間の速度と言います。

位置と速度の関係



速度とは、位置が時間に対してどれぐらい変化したかを表している。

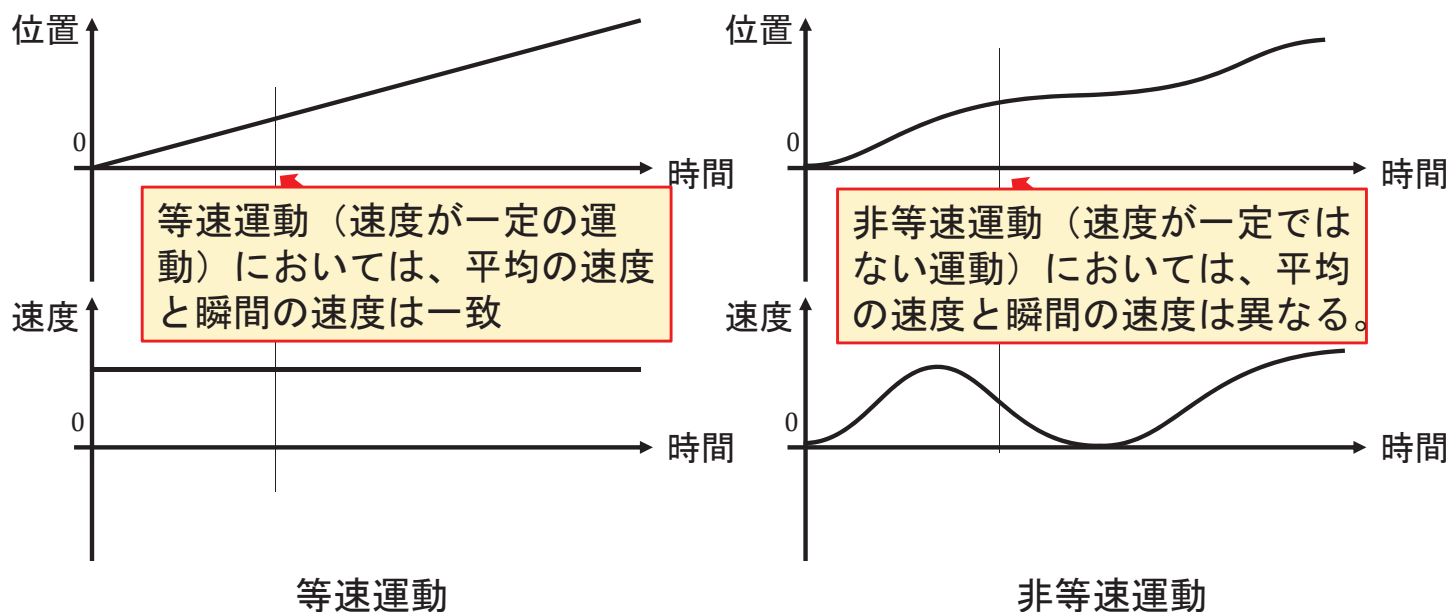
平均の速度



平均の速度 V は、ある時間の範囲 T において、移動した距離 L から、求められる。

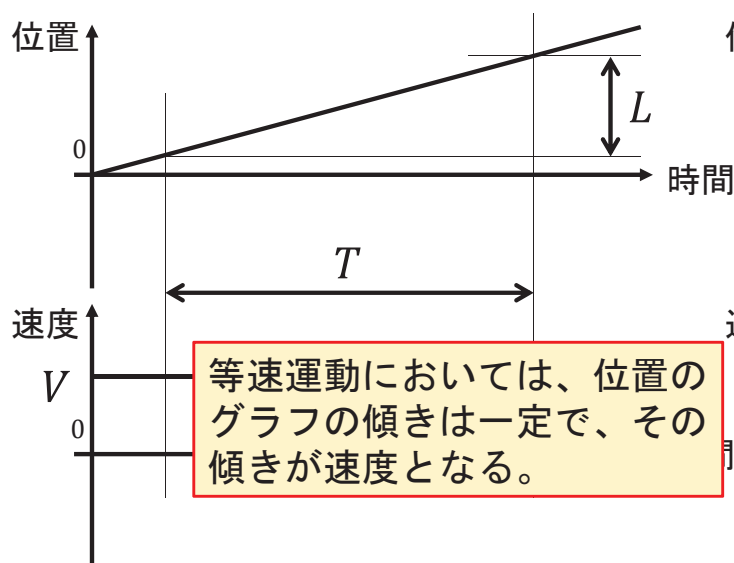
$$V = L/T$$

瞬間の速度

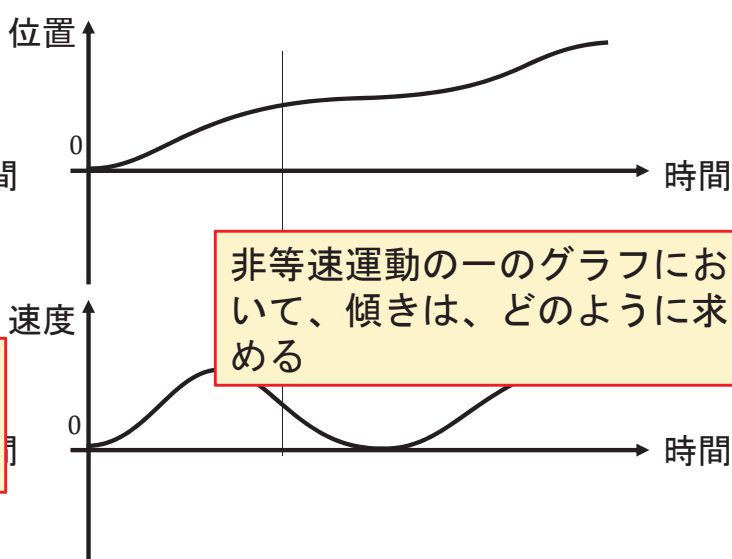


瞬間の速度 v は、ある時間 t において、その瞬間に移動した距離 Δx から、求められる。

速度の求め方



等速運動

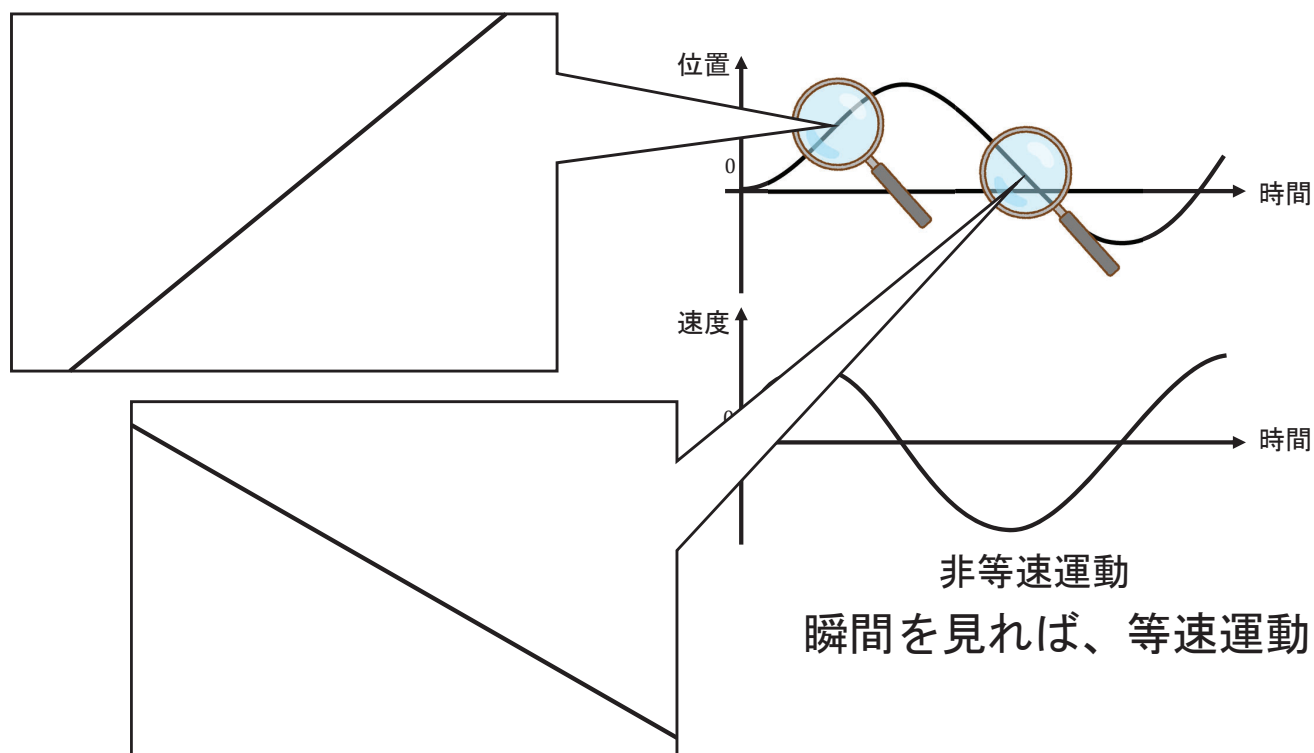


非等速運動

位置のグラフからの速度の求め方は？

位置のグラフにおける位置の変化の傾きが速度。

瞬間の速度の求め方



瞬間という考え方

瞬間は、ごく短い時間。

では、具体的には、どれぐらい短いのでしょうか？

数学の世界では、瞬間とは、限りなく0に近いけど、0でない状態のことを示します。

→ 極限

一方で、とてつもなく大きくて、大きさが表現できないことを、「無限大である。」と言います。

これらを踏まえて…

速度を求める式 $V = L/T$ において、その時間 T が瞬間であるとしたとき、どうなるでしょうか。

瞬間の速度の計算(1)

速度の計算

$$V = \frac{L}{T}$$

において、時間を限りなく小さくしていきます。

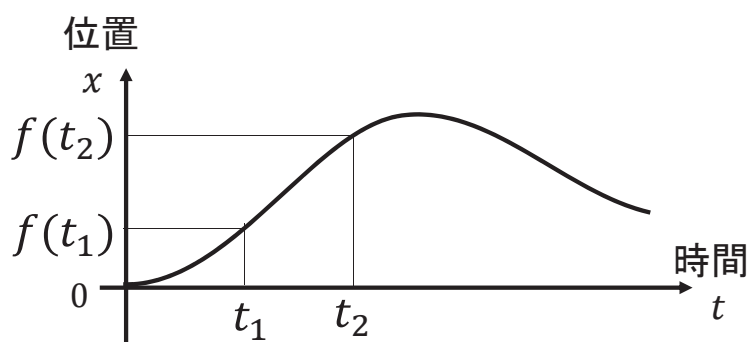
位置の変化を表す関数を $x = f(t)$ としたとき、時刻 t_1 から時刻 t_2 までの速度の計算式は次のようになります。

$$v = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

瞬間の速度は、時間

$$t_2 - t_1$$

を限りなく0に近づけたときの速度になります。



瞬間の速度の計算(2)

時間

$$t_2 - t_1$$

を限りなく0に近づけるための準備として、

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

という微小変化量を表す変数を定義します。

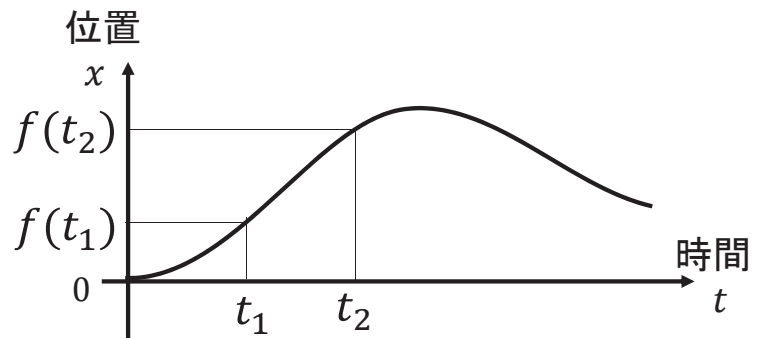
このとき、速度の式は、次の様に書き換えられます。

$$v = \frac{f(t_1 + \Delta t) - f(t_1)}{\Delta t}$$

瞬間の速度は、 $\Delta t \rightarrow 0$ のときの速度

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_1 + \Delta t) - f(t_1)}{\Delta t}$$

となります。



微分と速度

数学において

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_1 + \Delta t) - f(t_1)}{\Delta t}$$

は、次の様に表記されます。

$$v = \frac{df(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_1 + \Delta t) - f(t_1)}{\Delta t}$$

このような計算を微分と言います。

総合してみると…

位置の関数 $f(t)$ を時間 t で微分したものが速度 v となります。

言い換えれば、

位置と速度の間には微分の関係があるということになります。

微分と積分

位置から速度を求める方法として微分を紹介しましたが、速度から位置を求めることはできるのでしょうか？

速度から位置を求める場合、微分の逆で、積分という計算を行います。

速度から位置を求める計算(積分)

$$x = \int_{t_1}^{t_2} v dt$$

微分と積分の計算方法は、数学でしっかり学んでおこう。ここでは、次の関係を覚えておいてください。



物理と数学の関係性

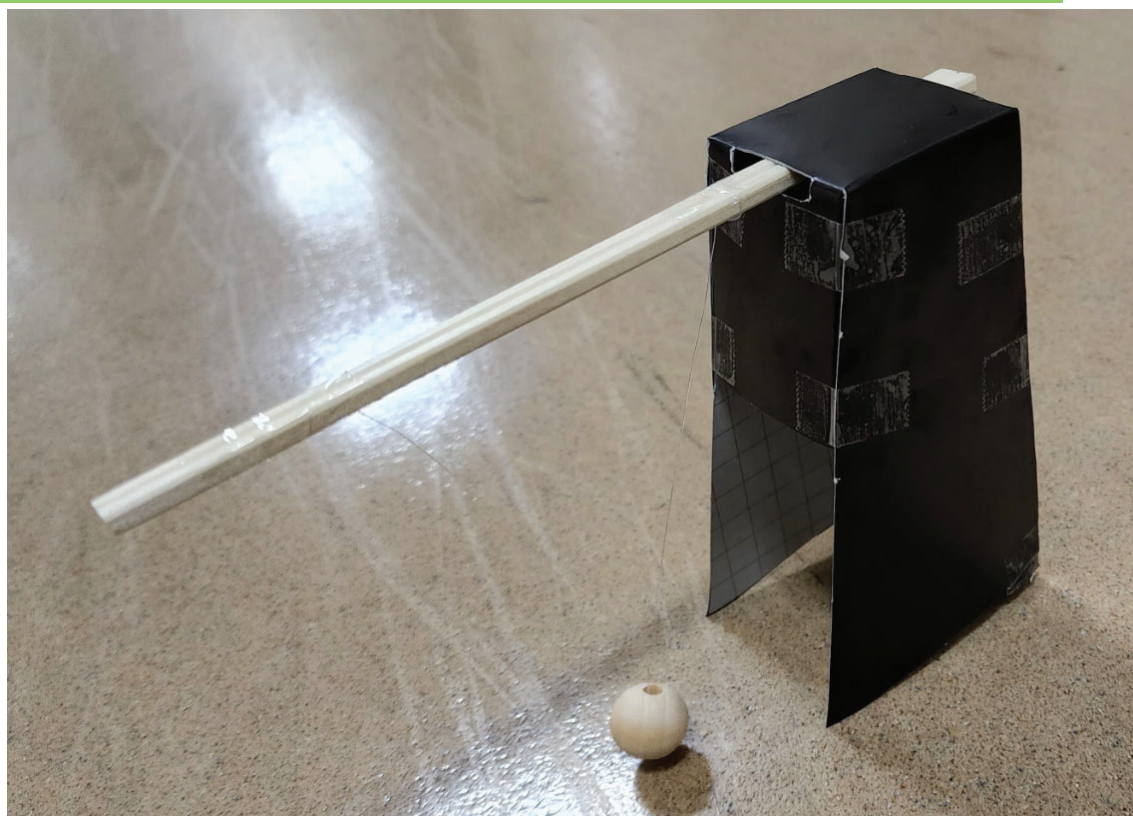
位置、速度、加速度の関係性だけでなく、様々な物理的現象が、数式など数学的に表現できます。

- 1) 運動や力の挙動
- 2) 振動（振り子、音・・・）

運動や力が、ベクトルを使って表現できることは、学んでいますが、振動と数学がどのようにつながるのでしょうか？

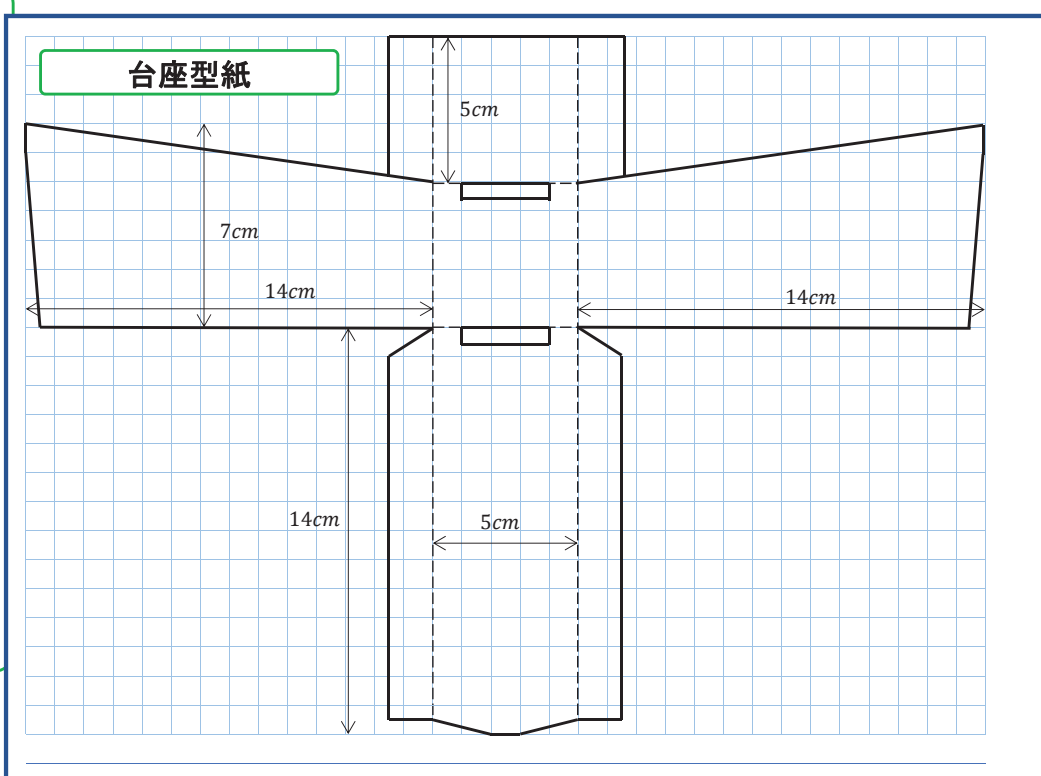
今回は、振り子を使って考えてみましょう。

振り子実験装置の製作(1)



振り子実験装置の製作(2)

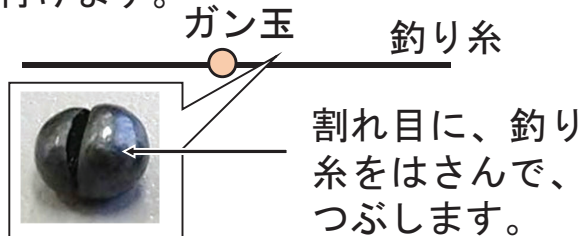
- ① 台座を作る。
- ①-1 厚紙を、指定された寸法で切り取ります。
- ①-2 二つの窓は、カッターで切り取って置いてください。
- ①-3 折り線には、折り目を付けます。
- ①-4 右の写真を参考に折り上げた後、テープで固定します。



振り子実験装置の製作 (3)

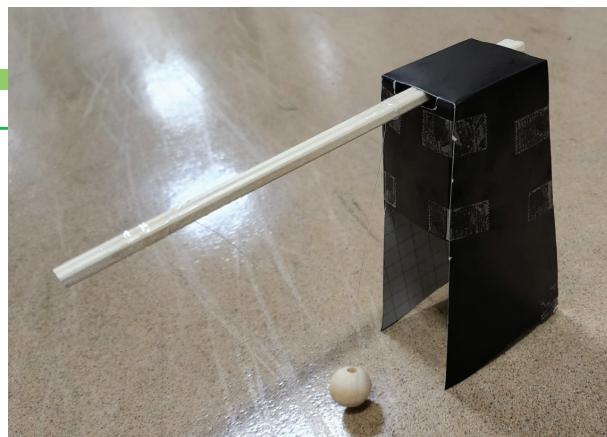
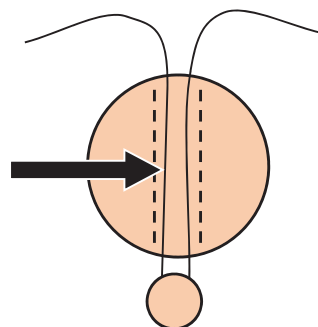
② オモリを作る。

- ②-1 釣り糸 (40cm) の中央に、ガン玉を取り付けます。



- ②-2 木の玉の穴に、釣り糸の両端から通します。

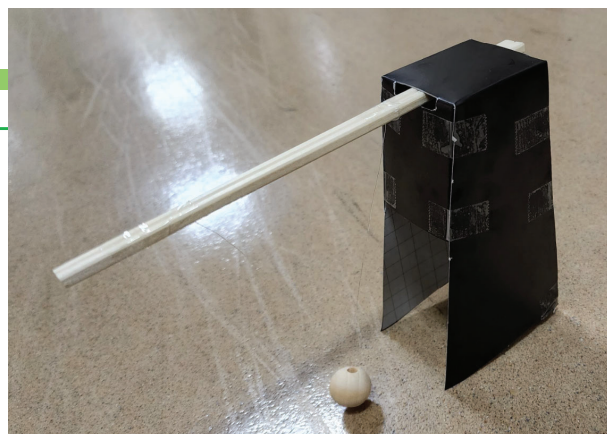
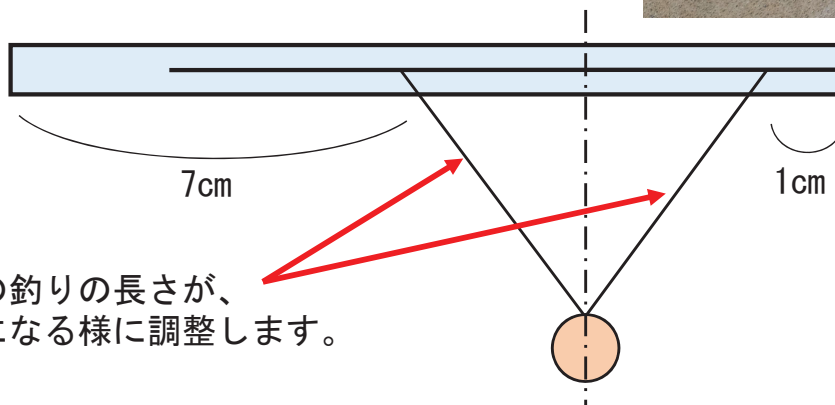
木の玉の穴に、釣り糸を通します。



振り子実験装置の製作 (4)

③ オモリを割り箸に取り付けます。

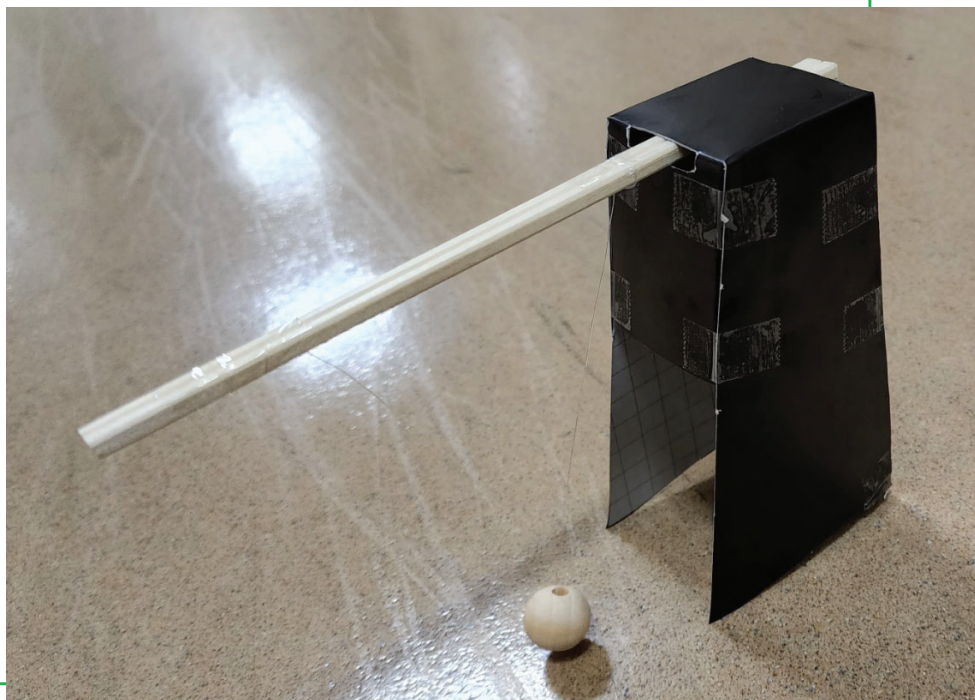
- ③-1 図の様に、釣り糸を割り箸で挟んで、調整してから、テープで固定します。



振り子実験装置の製作 (5)

④ オモリを付けた割り箸を取り付けます。

- ④-1 写真を参考にして、割り箸を、台座の穴に差し込みます。



振り子の実験

(実験の目的)

振り子の実験装置を使って、振り子の挙動を調べる。

(実験の方法)

振り子の周期を、振り子の初期位置を変えて、調べる。

(実験の手順)

- ①オモリの重さと、振り子の長さを計る。
- ②振り子のひもが緩まないように、オモリを横にずらす。
- ③オモリから手を離し、10回往復する時間を計る。
- ④最初にずらした量を変えて、10回往復する時間を計る。

振り子の実験（データ）

オモリ（重さ、直径）

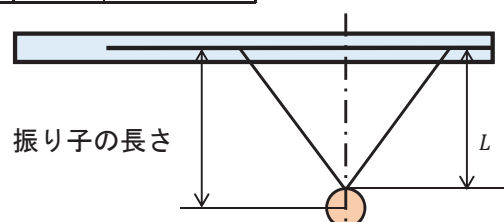
オモリ		重さ M [kg]	直径 D [m]
	1回目		
	2回目		
	3回目		
	平均		

振り子の長さ

振り子		長さ L [m]
	1回目	
	2回目	
	3回目	
	平均	

10回往復する時間

10回往復する時間	初期ずれ B [m]	ずれ小	ずれ大
	1回目		
	2回目		
	3回目		
	平均		



振り子の長さは、正確には、ひもの取付位置から、オモリの中心までの距離になります。

$$(\text{振り子の長さ}) = L + \frac{D}{2}$$

振り子の実験（考察）

（実験の考察）

振り子が10回往復する時間から、周期を求める。

（周期）＝振り子が1往復する時間

振り子の振り幅を変化させたときの、振り子の周期について、考察せよ。

（考察の検証）

振り子の重さが M 、振り子の長さが l であるときの、振り子の周期 T を、振り子のモデルから検証する。

振り子のモデルの計算（速度）

振り子の重さが M 、振り子の長さが l であるときの、最下部での速度 v を求めたい。

エネルギー保存の法則から、

$$\frac{1}{2}Mv^2 = Mgh \quad \dots (1)$$

高さの差 H を、振り子の長さ l と振り上げた位置でのひもの角度 θ で表すと

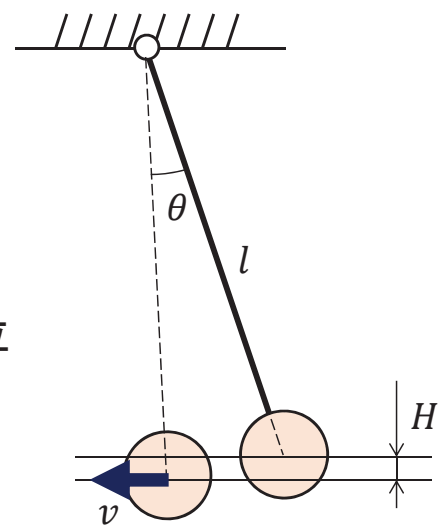
$$H = l - l \cos \theta \quad \dots (2)$$

となることから、式(1)は、次の様になる。

$$\frac{1}{2}Mv^2 = Mgl(1 - \cos \theta) \quad \dots (3)$$

式(3)を変形して、最下部での速度は次の様になる。

$$v = \sqrt{2\frac{g}{l}(1 - \cos \theta)} \quad \dots (4)$$



振り子のモデルの計算（周期） (1)

振り子の重さが M 、振り子の長さが l であるときの、振り子が往復運動する周期 T を求めたい。

オモリには、重力がかかっています。

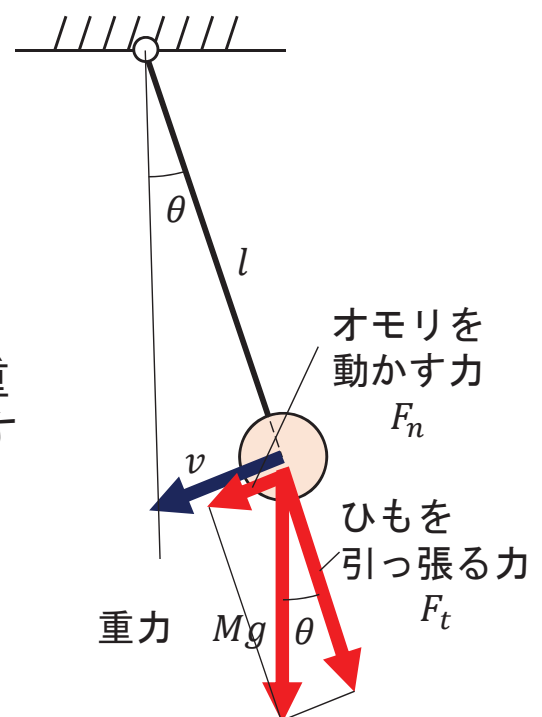
重力は、オモリを動かす力 F_n とひもを引っ張る力 F_t にわかれます。

オモリを動かす力 F_n は、重力 Mg とひもが重力方向となす角度 θ を使って、次の様に表す事ができます。

$$F_n = Mg \sin \theta \quad \dots (5)$$

ニュートンの第一法則より、オモリの運動は、次の様に表す事ができます。

$$Ma = F_n = -Mg \sin \theta \quad \dots (6)$$



振り子のモデルの計算（周期）（2）

$$Ma = F_n = -Mg \sin \theta \quad \dots (6)$$

式(6)で、 a は加速度を表し、速度 v と加速度 a の間には

$$a = \frac{dv}{dt} \quad \dots (7)$$

の関係があるので、式(6)は次の様になります。

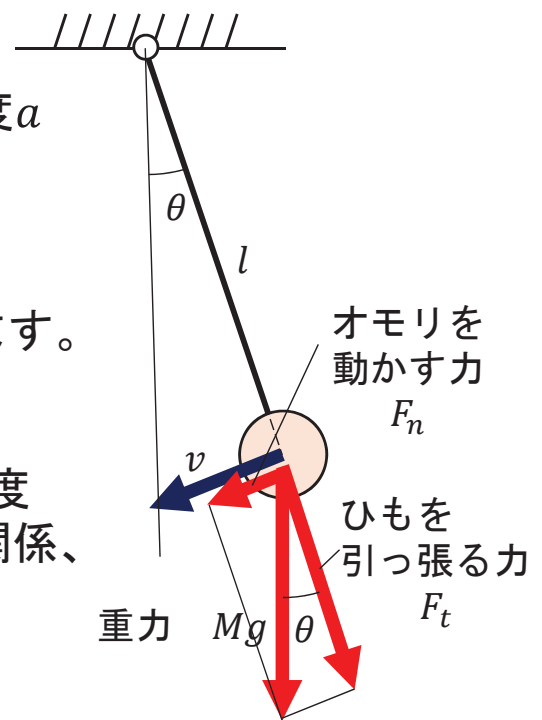
$$\frac{dv}{dt} = -g \sin \theta \quad \dots (8)$$

ここで、振り子のひもの重力方向となす角度の速度 ω （角速度）と、オモリ（おもり）の速度 v の関係、

$$v = l\omega \quad \dots (9)$$

を使うと、式(8)は次の様になります。

$$\frac{d(l\omega)}{dt} = l \frac{d\omega}{dt} = -g \sin \theta \quad \dots (10)$$



振り子のモデルの計算（周期）（3）

$$\frac{d(l\omega)}{dt} = l \frac{d\omega}{dt} = -g \sin \theta \quad \dots (10)$$

角速度と角度の関係

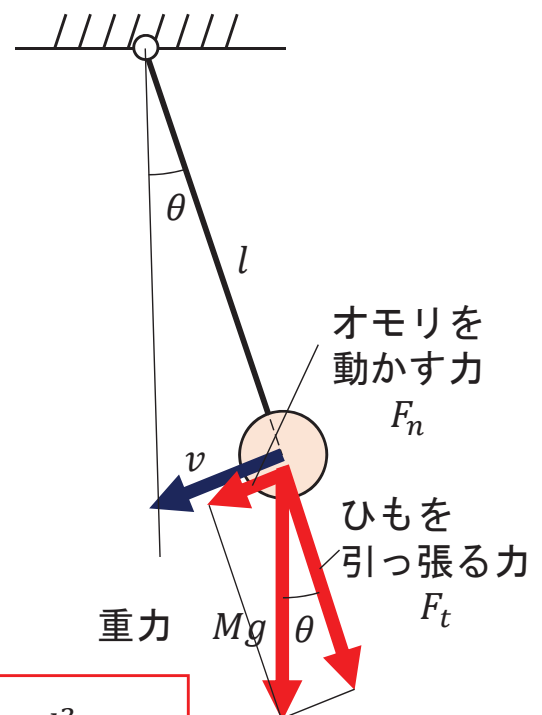
$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad \dots (11)$$

を使うことで、式(10)は次の様に書ける。

$$l \frac{d\omega}{dt} = l \frac{d}{dt} \left(\frac{d\theta}{dt} \right) = l \frac{d^2\theta}{dt^2} = -g \sin \theta$$

$$\therefore \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \theta \quad \dots (12)$$

このような式を運動方程式と言います。



$$a = \frac{dv}{dt}, \quad v = \frac{dx}{dt} \text{ から、 } a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

振り子のモデルの計算（周期）（4）

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta \quad \dots (13)$$

角度が微小であるとする

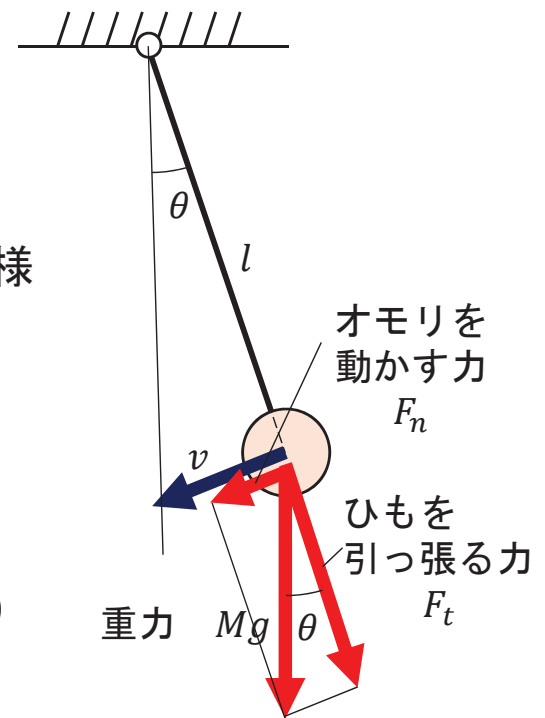
$$\sin\theta = \theta \quad \dots (14)$$

の関係が成り立つことから、式(13)は次の様に書ける。

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta \quad \dots (15)$$

式(15)を解くことで、

$$\theta = \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) \quad \dots (16)$$



式(8)や式(10)の様な方程式を、微分方程式と呼びます。

振り子のモデルの計算（周期）

一般的な三角関数

$$y = A\sin\omega t \quad \dots (17)$$

について、 ω が定数であるとき、 t が変化したときの挙動を調べる。

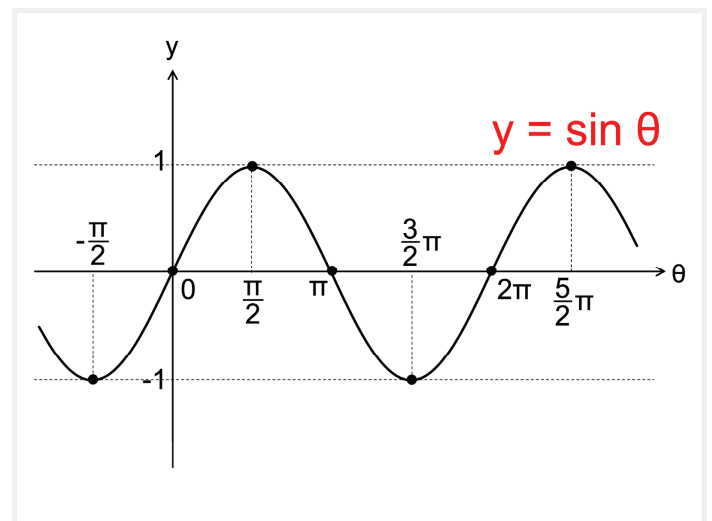
まず、 $y = \sin\theta$ として、 θ を変化させると、右の様なグラフが得られる。

右の図に見られるように、三角関数は、繰り返し同じ値を取り、このような関数を周期関数と呼び、周期 T は、 2π となります。

式(1)において周期を考えると

$$\omega T = 2\pi \quad \dots (18)$$

の関係が得られます。



振り子のモデルの計算（周期） (5)

式(16)

$$\theta = \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) \quad \dots (16)$$

と式(18)

$$\omega T = 2\pi \quad \dots (18)$$

で

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad \dots (19)$$

とすると、周期は、次の様に求められる。

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \dots (20)$$

実験結果から求めた周期と、式(20)より求めた周期を比較してみよう。

周期 T	実験結果	
	計算結果	

振り子の実験（まとめ）

振り子において、周期は、振り子の長さのみで決まる。

式(4)

$$v = \sqrt{2\frac{g}{l}(1 - \cos\theta)} \quad \dots (4)$$

で、振り幅を大きくすると、最下部での速度が速くなることがわかるが、式(20)

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \dots (20)$$

で示されるように、振り幅が周期に影響を与えない。

イメージ的には、振り幅が大きくなると、速度が速くなり、周期を同じにしようとしている。

まとめ

物理的な挙動を考える上で、数学は重要であるが、逆に言えば、数学で扱う様々な項目は、物理的意味に関連付いている。

数式を物理的観点から、とらえることで、数式の間につながりにも、気づきやすくなる。

(数学・物理の勉強法)

- ・まずは、基礎問題を徹底的にやってパターンを覚える
わからない問題は、まずは、答えを見ながら、解いてみる。解答に示されている式で、省略されている部分を埋めるように、解いてみよう。

練習問題

(1) 次の極限に関する計算をせよ。 **高3向け**

$$\textcircled{1} \quad y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{x}$$

$$\textcircled{2} \quad y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x}$$

(2) 半径が無限大の円とは、どのような形でしょうか？
ヒント) 円全体ではなく、円周の一部を考えよう。

練習問題 (答え)

(1) 次の極限に関する計算をせよ。 **高3向け**

$$\textcircled{1} \quad y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{x}$$

分母を0にはできません。

そのため、まずは、分母が0にならないようにします。

もう一つ、

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$$

を覚えておこう。

この二つを適用するためには、分母と分子を x で割るという作業が重要になります。

$$y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{x}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x} \right) = 1 + \infty = \infty$$

練習問題 (答え)

(1) 次の極限に関する計算をせよ。 **高3向け**

$$\textcircled{2} \quad y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x}$$

極限を考える上で重要になるのが

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

で、この形を作ること考えると、分母と分子を x で割るという作業が重要になります。

詳しくは

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = +0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = -0$$

$$\begin{aligned} y &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{x}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right) = 1 + 0 = 1 \end{aligned}$$

練習問題 (答え)

(2) 半径が無限大の円とは、どのような形でしょうか？
ヒント) 円全体ではなく、円周の一部を考えよう。

半径が大きくなると丸みが、なくなってきます。
半径が無限大になると、その円周の一部は、ほぼ直線となります。

円の方程式

$$x^2 + y^2 = r^2$$

において、半径が1と1000の場合で、 x が-1から1の範囲のを調べてみよう。